Schalten induktiver Lasten*

Dieter Fleischmann

26. Mai 2000

Zusammenfassung

Beim Abschalten induktiver Lasten treten wegen magnetischer Energiespeicherung in der Induktivität Stromprobleme auf. Die zugehörige Theorie wird besprochen und mit einem Beispiel ergänzt.

Inhaltsverzeichnis

1 Physikalische Aspekte

In der Elektrodynamik unterscheidet man zwei Klassen von passiven zweipoligen Bauelementen:

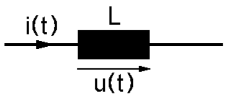
- solche, die zugeführte elektrische Energie instantan aus ihrer Schaltungsumgebung irreversibel entfernen. Ihre aufgenommene Momentanleistung ist vereinbarungsgemäß stets positiv, daher ist das Zeitmittel der Momentanleistung ebenfalls stets positiv.

*Dieser Text gehört zum URL: http://www.dfleischmann.at

Kennzeichen: Die Abhängigkeit der Momentanwerte von Strom und Spannung können in einer algebraischen Gleichung beschrieben werden. Diese Gleichung heißt (elektrische) Kennlinie des Bauelementes.

- solche, die zugeführte elektrische Energie nicht aus ihrer Schaltungsumgebung entfernen können, aber während mancher Zeiten Energie aus dem sie umgebenden Netzwerk in sich selbst aufnehmen, während anderer Zeiten aber wieder Energie an dieselbe Netzwerkumgebung zurückliefern. *Weil alle Energie in der Schaltung selbst verbleibt und die Schaltung* (voraussetzungsgemäß - neben Energiequellen - nur derartige Bauelemente enthalten soll) *samt Energiequellen abgeschlossen ist, ist das „alles-über-alles-Zeitmittel“ aller Leistungen in der Schaltung stets null.*
  Kennzeichen: Die Abhängigkeit der Momentanwerte von Strom und Spannung können nur in einer Differentialgleichung beschrieben werden. Diese Gleichung heißt (elektrische) Kennlinie des Bauelementes. Der auftretende Differentialquotient kennzeichnet jene skalare Netzwerkgröße, über die die zugeführte Energie gespeichert wird.

Zu den Bauelementen mit den zuletzt angeführten Eigenschaften gehört die Induktivität L:



mit folgender Bauteilegleichung zur dargestellten Bepfeilung:

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \ . \tag{1}$$

Die Spannung $u = u(t)$ ist eine Induktionsspannung (und keine Ohmsche Spannung; das Bauelement L enthält ja keinen Ohmschen Widerstand). Die dem Bauelement L zuzuordnende *elektrische* Energie $W(t)$ nach:

$$dW(t) = p_{el}(t) \cdot dt = u(t) \cdot i(t) \cdot dt = L \cdot i \cdot di \tag{2}$$

bezieht es aus seiner Schaltungsumgebung. Sie kann zunächst nur als zeitliche Änderung $dW(t)$ angegeben werden. Diese Momentanenergie $W(t)$ wird vom Bauelement instantan (also als differentielle Änderung $dW(t)$ pro Zeitintervall dt zur Zeit t) in magnetische Momentanenergie $W_m\,(t)$ umgewandelt und im Volumen V_m, in dem die Induktivität L Magnetismus ausbilden kann, gespeichert. Das Bauelement L ist nicht fähig, diese Energie aus der Schaltung zu entfernen. *Sie ist daher innerhalb der Schaltung zu bilanzieren.* Für diese Bilanz ist im

Magnetkern dieses Bauelementes zu berücksichtigen[1]:

W_m	Magnetische Energie bei $\mathbf{B}$ und $\mathbf{H}$ im Magnetkern am Ort $\mathbf{r}$ zur Zeit t.
$w_m := \frac{dW_m}{dV_m}$	(räumliche) magnetische Energiedichte bei $\mathbf{B}$ und $\mathbf{H}$ im Magnetkern am Ort $\mathbf{r}$ zur Zeit t.
$\frac{\partial w_m(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \mathbf{H}(\mathbf{r},t) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}$	Zeitliche Änderung der (räumlichen) magnetischen Energiedichte w_m im magnetisch (auch anisotropen) Raum bei $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ im Magnetkern am Ort $\mathbf{r}$ zur Zeit t.

(3)

Es folgt:

$$dW(t) = p_{el}(t) \cdot dt = L \cdot i \cdot di \stackrel{!}{=} dW_m(V_m,t) = \frac{d}{dt}\left(\int_{V_m} w_m(t) \cdot dV_m\right) \cdot dt \ .$$

Im Rechtsterm dieser Gleichung kann man *bei vorausgesetzter Unabhängigkeit von (Kern-) Raum* $\mathbf{r}$ *und Zeit* t (also bei ruhendem Magnetsystem) räumliche Integration und zeitliche Differentiation vertauschen und erhält:

$$\begin{aligned} dW(t) = L \cdot i \cdot di \stackrel{!}{=} dW_m(V_m,t) = \tfrac{d}{dt}\left(\int_{V_m} w_m(\mathbf{r},t) \cdot dV_m\right) \cdot dt = \\ = \left(\int_{V_m} \tfrac{\partial w_m(\mathbf{r},t)}{\partial t} \cdot dV_m\right) \cdot dt = \left(\int_{V_m} \left(\mathbf{H}(\mathbf{r},t) \cdot \tfrac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right) \cdot dV_m\right) \cdot dt \ . \end{aligned}$$

Die Integration über die Beobachtungszeit $\Delta t := t_2 - t_1 = |\Delta t| > 0s$, die im Rechtsterm die entsprechenden *zeitlichen* Änderungen der vektoriellen magnetischen Zustandsgrößen $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ im Kernraum $\mathbf{r}$ mit dem Volumen V_m berücksichtigen muß, liefert die gefragte Energiebilanz:

$$\begin{aligned} W(V_m;t_1,t_2) &= \int_{i(t_1)}^{i(t_2)} L \cdot i \cdot di = \frac{L}{2} \cdot \left(i^2\,(t_2) - i^2\,(t_1)\right) = \\ &= \int_{V_m} \left(\int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{H}(\mathbf{r},t) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right) \cdot dt\right) \cdot dV_m \ . \end{aligned} \qquad (4)$$

Aus dieser Beziehung (4) muß man schließen:

- Bei periodischen Ursachen wird man die Zeitspanne $\Delta t > 0s$ so wählen können, daß $W(t_1,t_2)$ verschwindet; *wenn nicht „sofort", dann wenigstens „nach einiger Wartezeit"*.
- Bei nichtperiodischen Ursachen verschwindet die Energie $W(V_m;t_1,t_2)$ i.a. **nicht**. Dieser Fall ist beim Schalten von allgemeinen induktivitätshältigen

[1] Die zugehörige Theorie gründet sich auf dem Begriff des Poynting-Vektors. Siehe Dazu: *Dieter Fleischmann*: Basiswissen Elektrotechnik, Vogel (1999), Anhang Kap. L p.746.

Stromkreisen von *einem* magnetischen Zustand im Kern von L auf einen *anderen* magnetischen Zustand im Kern von L *immer* gegeben, wenn diese Stromkreise zu beliebigen Zeiten - also unabhängig von eventuell vorhandenen zeitlichen Periodizitäten - von *einem* in einen *anderen* magnetischen Zustand *niedrigerer gespeicherter magnetischer Energie* umgeschaltet werden **müssen**. Das technische Problem stellt sich dann als **Transport** der **um**zuspeichernden *magnetischen* Energie, Formel (4):

$$\begin{aligned} W(V_m; t_1, t_2) &= \frac{L}{2} \cdot \left(i^2\left(t_2\right) - i^2\left(t_1\right)\right) = \\ &= \int_{V_m} \left(\int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) \cdot dt \right) \cdot dV_m \ , \end{aligned}$$

deren Zahlenwert stets positiv ist, **aus der Schaltung hinaus** in ihre räumliche Umgebung. Dieser Transport geht selbstverständlich Hand in Hand mit einer Umwandlung in eine die aktuelle Anwendung möglichst nicht direkt störende nicht*elektromagnetische* Energieform (meistens Wärme, aber auch mechanische Energie, o.ä.). *Um die weitere umweltschonende Entsorgung dieser Energieform kümmert sich der Schaltungstechniker freilich kaum mehr* - von löblichen Ausnahmen in der *Energie*technik abgesehen.

Es ist Ziel dieser Arbeit, das Schicksal der in Formel (4) beschriebenen Energie nach Durchführung einer ganz bestimmten (schaltungstechnischen) Kampfmaßnahme zu schildern.

2 Schaltungstechnik

2.1 Spulenladung, -ent- und -umladung

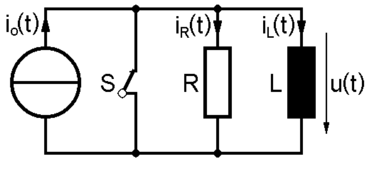
2.1.1 Spulenladung und -entladung

Jeder Energietransport braucht notwendigerweise Zeit. Daher wird man sich mit der Tatsache abfinden müssen, die im Kern der Induktivität L gespeicherte magnetische Energie nur peu à peu auch wieder loszuwerden.

Das übliche Konzept:

Ersatzspannungsquelle an Induktivität mit Schalter in Serie

ist aus den weiter oben geschilderten Gründen physikalischer Unsinn und muß daher verworfen werden. Man halte sich etwa an [1, p.447ff]:



Schaltungsbeschreibung:

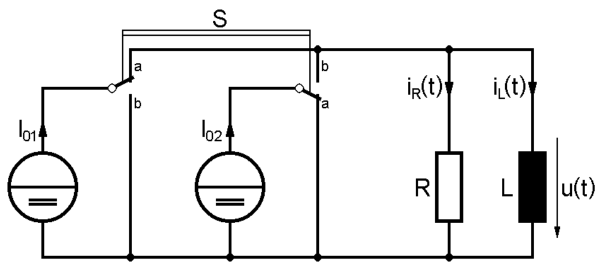
> Eine unabhängige Stromquelle mit dem (Großsignal-) Strom $i_0(t)$ als Quellgröße wird mit dem Schalter S zu beliebigen Zeiten t ebenso beliebig ein-/ausgeschaltet. Daher stellen sich die Großsignale aller anderen zeitabhängigen Zweigströme $i_R(t)$ und $i_L(t)$, sowie der Spannung $u(t)$ entsprechend den physikalischen Voraussetzungen ein. Sie sind - bis auf den Strom des Schalters S - vollständig eingezeichnet. Das Problem der in der Induktivität L gespeicherten magnetischen Energie bei beliebiger Stellung des Schalters S kann physikalisch einwandfrei behandelt werden.
>
> Der Schalter S arbeite ideal: Ist er geschlossen, so fällt keine Spannung an ihm ab, ist er offen, so führt er keinen Strom. Und das alles jeweils „sofort“, also im Augenblick des Betätigens.
>
> Einfachheitshalber habe ich alle Ströme und Spannungen mit Kleinbuchstaben bezeichnet, unabhängig davon, ob sie jeweils einen nichtverschwindenden Gleichanteil besitzen, oder nicht.

2.1.2 Spulenumladung

Schaltung Obige Anordnung beschreibt jenen Vorgang, der üblicherweise unter Spulenladung (oder auch Spulenentladung) bekannt ist. Die Verallgemeinerung ist die Spulen**um**ladung vom Zustand 1 auf Zustand 2:

$$\begin{array}{cc} \text{Zustand 1} & \text{Zustand 2} \\ i_1 := i(t_1) & i_2 := i(t_2) \\ \mathbf{H}_1 := \mathbf{H}(t_1) & \mathbf{H}_2 := \mathbf{H}(t_2) \\ \mathbf{B}_1 := \mathbf{B}(t_1) & \mathbf{B}_2 := \mathbf{B}(t_2) \end{array}$$

Zu diesem Vorgang gehört folgende Schaltung:



$$S \text{ in Stellung } \begin{cases} a \text{ für } t < t_0 \\ b \text{ sonst} \end{cases} , \qquad S \text{ arbeitet unterbrechungsfrei.} \tag{5}$$

Schaltungsbeschreibung:

Für alle Zeiten $t < t_0$ versorgt die Energiequelle I_{01} die Parallelschaltung $(R//L)$. Sonst übernimmt die Energiequelle I_{02} diesen Job *unterbrechungsfrei*. Die jeweils nicht als Energielieferant benötigte Quelle läuft inzwischen umweltschonend im Kurzschlußbetrieb weiter. Den beiden Urstromquellen wurden zeitunabhängige Quell-Gleichströme aufgezwungen, damit die nachfolgende Mathematik so einfach wie möglich bleiben kann.

Von den Zahlenwerten $\{I_{01}\}$ und $\{I_{02}\}$ der Größen I_{01} und I_{02} wird bloß verlangt, daß sie reelle Zahlen seien; über ihr „Vorzeichen" wird keineswegs verfügt.

Netzwerkanalyse Vor Beginn der Netzwerkanalyse, die sicherlich die Zeit t als zentrale physikalische Größe enthält, muß man sich naturgemäß auf die Schalterstellung einigen, weil sie ja die energetische Anfangsbedingung definiert. Vereinbaren wir:

Analysiert wird für Zeiten $t \geq t_0$.

Unter diesen Umständen besitzt die Schaltung zwei Bauelemente und zwei Knoten. Daher gilt:

Bauteilegleichungen:

$$u = R \cdot i_R \tag{6}$$

$$u = L \cdot \frac{di_L}{dt} \tag{7}$$

Knotengleichung:

$$I_{02} = i_R + i_L \tag{8}$$

In diesem Gleichungssystem, Formeln (6) … (8), sind folgende physikalische Größen *bekannt*:

R	Ohmscher Widerstand
L	Induktivität
t_0	Schaltzeitpunkt
I_{01}	nach $(R//L)$ zufließender (Gleich-) Strom im Schaltzeitpunkt t_0 (Anfangsbedingung)
I_{02}	nach $(R//L)$ zufließender (Gleich-) Strom für alle Zeiten $t \geq t_0$.

In diesem Gleichungssystem, Formeln (6) … (8), sind folgende physikalische Größen *unbekannt*:

i_R	Strom durch R
i_L	Strom durch L
u	Spannung über $(R//L//I_{02})$.

Weil drei Gleichungen zur Verfügung stehen, sind (bei vorausgesetzter Lösbarkeit des Systems) keinerlei Schwierigkeiten zu erwarten. Von den drei unbekannten physikalischen Größen wählen wir den Strom $i_L = i_L(t)$ als Zielgröße aus, weil die Induktivität L magnetische Energie W_m über den Strom i_L speichern muß:

$$I_{02} = \frac{L}{R} \cdot \frac{di_L}{dt} + i_L \ .$$

Mit der Zeitkonstanten τ:

$$\tau := \frac{L}{R} \tag{9}$$

bringen wir diese Gleichung auf Norm:

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot i_L = \frac{I_{02}}{\tau} \ . \tag{10}$$

Formel (10) ist die Standard-Differentialgleichung aller einschlägigen Umladevorgänge, weshalb ich mich kurz fasse [1, p.451]:

- Zugeordnete homogene Gleichung:

$$\frac{di_{L,h}}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot i_{L,h} = 0 \ . \tag{11}$$

- Deren Lösung:

$$i_{L,h}\,(t) = k \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \ . \tag{12}$$

  Die Integrationskonstante k ist ein Strom.

- Eine partikuläre Lösung von Formel (10) ist:

$$i_{L,p} = I_{02} \ . \tag{13}$$

- Allgemeine Lösung von Formel (10) ist daher:

$$i_L\,(t) = i_{L,h}\,(t) + i_{L,p} = k \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + I_{02} \ . \tag{14}$$

- Anpassung an die noch allgemein formulierte Anfangsbedingung, Formel (5):

$$i_L\,(t_0) \stackrel{!}{=} I_{01} \tag{15}$$

  liefert in Formel (14):

$$i_L\,(t_0) = k \cdot e^{-\frac{t_0}{\tau}} + I_{02} \stackrel{!}{=} I_{01} \ .$$

  Es folgt:

$$k = (I_{01} - I_{02}) \cdot e^{\frac{t_0}{\tau}} \ ,$$

  daher ist der gesuchte Strom i_L durch die ideale Spule:

$$\begin{aligned} i_L\,(t) &= k \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + I_{02} = (I_{01} - I_{02}) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + I_{02} = \\ &= I_{01} \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + I_{02}\left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right) \ . \end{aligned} \tag{16}$$

2.1.3 Diskussion

Formel (16) beschreibt das Schicksal des Spulenstromes i_L, wenn er

- zur Umschaltzeit t_0 die Anfangsbedingung nach Formel (15):

$$i_L(t_0) \stackrel{!}{=} I_{01} \ ,$$

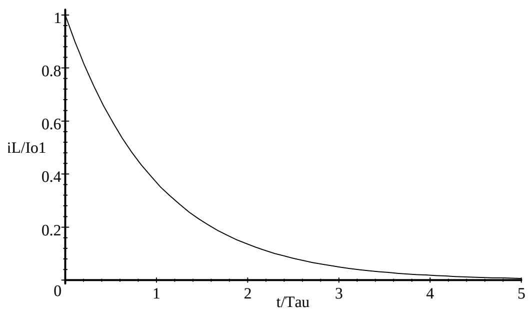
- und nach unendlich langer Zeit die folgende Bedingung (sie ist partikuläre Lösung der Differentialgleichung Formel (10)):

$$\lim_{t\to\infty} i_L(t) = \lim_{t\to\infty} \left(I_{01} \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + I_{02} \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \right) \right) = I_{02} \qquad (17)$$

erfüllt.
Dabei ist es unwesentlich, auf welche Art und Weise die Anfangsbedingung, Formel (15), zustande kommt - ob also $i_L(t_0) \stackrel{!}{=} I_{01}$ aus Gleichstrom I_{01} stammt, oder Momentanwert eines Großsignals $i_{01}(t = t_0)$ zur selben Zeit $t = t_0$ ist.
Ein Graph von $i_L(t)$ nach Formel (16) kann rein optisch sehr verschieden aussehen, wie für $t_0 = 0s$ gezeigt wird[2]:

- Klassische Entladung, Formel (16), für $\left\{ \begin{array}{l} I_{01} = |I_{01}| \\ I_{02} = 0A \end{array} \right.$:

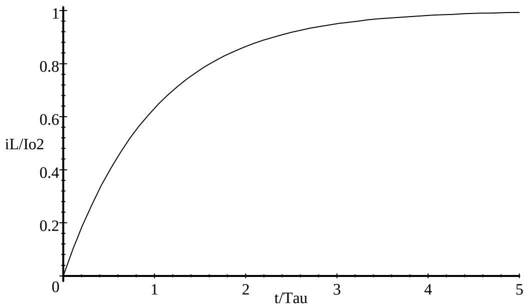
$$\frac{i_L(t)}{I_{01}} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$



- Klassische Ladung, Formel (16), für $\left\{ \begin{array}{l} I_{01} = 0A \\ I_{02} = |I_{02}| \end{array} \right.$:

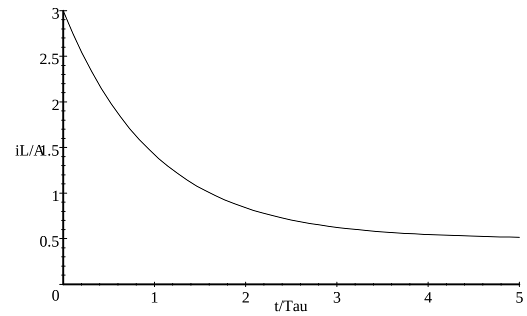
$$\frac{i_L(t)}{I_{02}} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

[2] Vergleiche dazu die mnemotechnischen Hilfsmittel in *Dieter Fleischmann*: Basiswissen Elektrotechnik, Vogel Würzburg (1999), p.408.



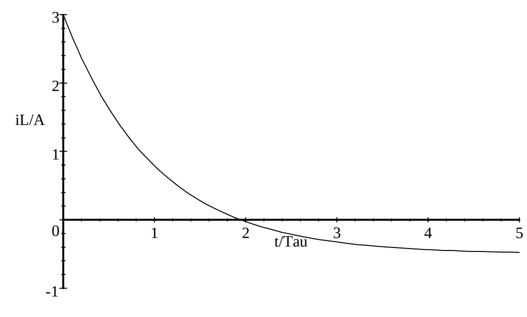
- Umladung, Formel (16), für $\left\{\begin{array}{l} I_{01} = 3A \\ I_{02} = 0.5A \end{array}\right.$:

$$\frac{i_L(t)}{A} = 3 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + 0.5 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



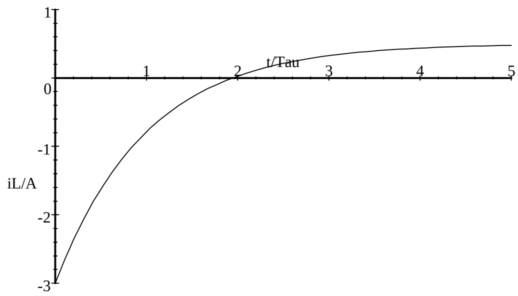
- Umladung, Formel (16), für $\left\{\begin{array}{l} I_{01} = 3A \\ I_{02} = -0.5A \end{array}\right.$:

$$\frac{i_L(t)}{A} = 3 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - 0.5 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



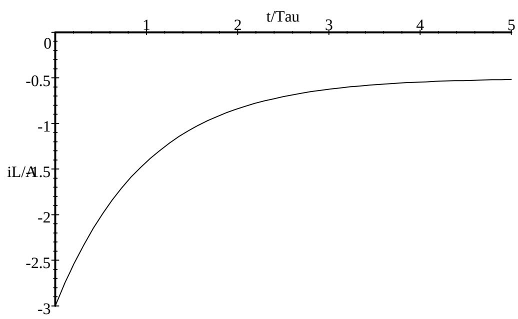
- Umladung, Formel (16), für $\begin{cases} I_{01} = -3A \\ I_{02} = 0.5A \end{cases}$:

$$\frac{i_L(t)}{A} = -3 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + 0.5 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



- Umladung, Formel (16), für $\begin{cases} I_{01} = -3A \\ I_{02} = -0.5A \end{cases}$:

$$\frac{i_L(t)}{A} = -3 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - 0.5 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



Wie man erkennt, enthält die allgemeine Lösung, Formel (16), der Differentialgleichung, Formel (10), alle möglichen bekannten Ausprägungen von „Lade- und Entladekurven" [1, p.408].

2.2 Anpassung der Theorie an die Praxis

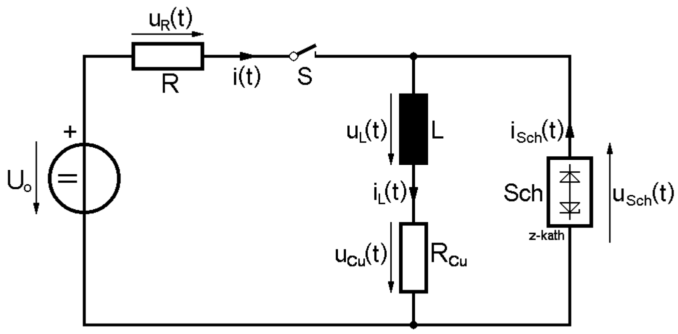
Bisher können Kritiker dieses Textes einwenden, daß die zuvor entwickelte Theorie deshalb praxisfremd sei, weil kein vernünftieger Mensch Stromquellen als Energiequellen verwende. Natürlich geht diese Kritik ins Leere, weil man bei Verwendung von Spannungsquellen als Energiequellen die identische Gleichungsstruktur wie Formel (10) erhält, wie gleich gezeigt wird.

2.2.1 Schaltung

Zunächst wird die Parallelschaltung ($I_0//S//R//L$) von Abschnitt 2.1.2 in die identische *duale* Schaltung umgezeichnet [1, p.448]. Bei dieser Tätigkeit erinnere man sich daran, daß technisch ausgeführten Spulen Verluste anhaften. Das einfachste Ersatzschaltbild einer nichtidealen Spule berücksichtigt bloß Kupferverluste, die durch Stromfluß verursacht werden und daher als Serienwiderstand R_{Cu} zu berücksichtigen sind [1, p.467]. Dieser einfachen Philosophie wollen wir anhängen.

Weil das Schalten (in Form des Unterbrechens eines Stromes) bei Induktivitäten aus physikalischen Gründen verboten ist, muß bei Abschalten der Energiezufuhr aus der unabhängigen Quelle die im Magnetkern von L gespeicherte Energie einen „Weg ins Freie“ erhalten. Für diesen Zweck wird ein zweipoliges *passives* Schutzelement Sch parallel zur Spule ($L \oplus R_{Cu}$), die den Energiespeicher L im Inneren enthält, geschaltet. Im „Normalbetrieb“, d.h. bei geschlossenem Schalter S, darf Sch nicht stören, also keinen Strom führen.

Das Ergebnis dieser Überlegungen ist folgender Stromlauf:



$$\text{Schalter } S \quad \begin{cases} \text{geschlossen für } t < t_0 \\ \text{offen sonst.} \end{cases} \tag{18}$$

Die Ersatzspannungsquelle ($U_0(t) = |U_0(t)|\,, R$) mit der Quell**gleich**spannung $U_o = |U_o|$ wird - nach (theoretisch) unendlich langem Betrieb - mit dem Schalter S zur Zeit t_0 vom Verbraucher ($L \oplus R_{Cu}$) abgeschaltet. Zu diesem Zeitpunkt gilt, *genauso wie dauernd davor*:

$$i_{Sch}(t_0) = 0A \; .$$

Daher ist der Spulenstrom im Abschaltzeitpunkt t_0:

$$i_L(t_0) = \frac{U_o}{R_{Cu}} \; , \tag{19}$$

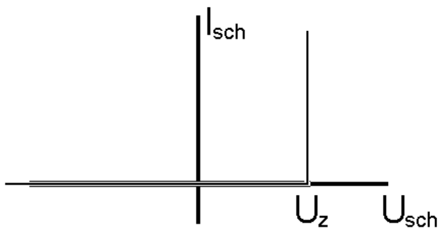
weil (längst) keine Induktion (mehr) stattfindet.

Das Problem der in der Induktivität L gespeicherten magnetischen Energie wird physikalisch einwandfrei abgehandelt: Der Strom $i_L(t)$ durch die Serienschaltung $(L \oplus R_{Cu})$ kann nach Öffnen des Schalters S zu beliebiger Zeit $t \geq t_0$ über das zweipolige Schutzelement Sch weiterfließen: $i_L(t) \stackrel{!}{=} i_{Sch}(t)$ für $t \geq t_0$. Die Eigenschaften dieses Schutzelementes Sch werden weiter unten diskutiert.

Der Schalter S arbeite ideal: Ist er geschlossen, so fällt keine Spannung an ihm ab, ist er offen, so führt er keinen Strom. Und das alles jeweils „sofort", also im Augenblick des Betätigens. Damit trennt er beim Ausschalten die Ersatzspannungsquelle $(U_0(t) = |U_0(t)|, R)$ vom Rest der Schaltung ab.

2.2.2 Eigenschaften des Schutzelementes

Das in obiger Schaltung verwendete Schutzelement Sch habe folgende ideale Kennlinie:



Wie im Inneren des Bauelementsymbols weiter oben angedeutet, erhält man dieses Verhalten angenähert durch Serienschaltung einer Z-Diode, Z-Spannung $U_z = |U_z|$, und einer (normalen) Diode. Sicherheitshalber beschreibe ich einige Details:

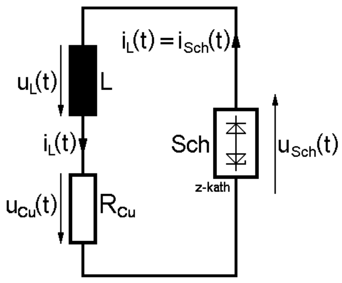
- Die (normale) Diode verhindert Stromfluß $-|I_{Sch}|$. Deshalb stört das Schutzelement Sch im Normalbetrieb von $(L \oplus R_{Cu})$, wenn der Schalter S geschlossen ist, nicht.
- Die Z-Diode stellt $U_z = |U_z|$ (in Stromflußrichtung $|I_{Sch}|$) ein. Ist der Schalter S geöffnet, so kann jener Strom i_L, der die magnetische Energie $W_m(t_0)$ im Kern von L abbaut, fließen. Dabei erzeugt er über dem Schutzelement Sch die Spannung $U_z = |U_z|$.
- Das Schutzelement Sch arbeitet für $U_{Sch} = U_z = |U_z|$ als ideale Verbraucherstromquelle [1, p.147f]. Hat nur einmal nach Öffnen des Schalters S der Strom I_{Sch} auf $I_{Sch} = 0A$ abgenommen, so kann bei **keiner** Spannung $U_{Sch} \leq U_z = |U_z|$ Strom I_{Sch} fließen, weil dem Schutzelement Sch keine Energie mehr zugeführt wird.

2.2.3 Netzwerkanalyse

Vor Beginn der Netzwerkanalyse, die sicherlich die Zeit t als zentrale physikalische Größe enthält, muß man sich naturgemäß auf die Schalterstellung einigen, weil sie ja die energetische Anfangsbedingung definiert. Vereinbaren wir:

Analysiert wird für Zeiten $t \geq t_0$.

Unter diesen Umständen kann kein Strom i fließen: $i(t) \equiv 0A$ (Identität in der Zeit $t > 0s$) und die Schaltung reduziert sich auf:



Hier gibt es drei Bauelemente und eine Masche:

Bauteilegleichungen:

$$u_L = L \cdot \frac{di_{Sch}}{dt} \tag{20}$$

$$u_{Cu} = R_{Cu} \cdot i_{Sch} \tag{21}$$

$$u_{Sch} = U_z = |U_z| \tag{22}$$

Maschengleichung:

$$u_L + u_{Cu} + u_{Sch} = 0 \tag{23}$$

Zusätzlich wird wegen der Passivität des Schutzelementes Sch gefordert:

$$(i_L =)\ i_{Sch} = |i_{Sch}| \tag{24}$$

In den vier Analysengleichungen, Formeln (20) $\cdots$ (23), sind folgende physikalische Größen *bekannt*:

L	Induktivität
R_{Cu}	Kupferverlustwiderstand
U_z	Schutzelementspannung bei Stromfluß $i_{Sch} \geq 0A$
t_0	Schaltzeitpunkt

In den vier Analysengleichungen, Formeln (20) und (23), sind folgende physikalische Größen *unbekannt*:

u_L	Spannung über L
u_{Cu}	Spannung über R_{Cu}
u_{Sch}	Spannung über Sch
$i_L = i_{Sch}$	Strom durch L, R_{Cu} und Sch

Weil vier Gleichungen zur Verfügung stehen, sind (bei vorausgesetzter Lösbarkeit des Systems) keinerlei Schwierigkeiten zu erwarten.

Die unbekannte Spannung $u_{Sch} = U_z$ lesen wir aus Gleichung (22) sofort ab.

Damit verbleibt als Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} u_L &= L \cdot \frac{di_{Sch}}{dt} \\ u_{Cu} &= R_{Cu} \cdot i_{Sch} \\ u_L + u_{Cu} &= -U_z \ . \end{aligned}$$

Von den drei unbekannten physikalischen Größen u_L, u_{Cu} und i_{Sch} wählen wir wiederum den Strom ($i_L =$) $i_{Sch} = i_{Sch}(t)$ aus, weil die Induktivität L magnetische Energie W_m über den Strom $i_L = i_{Sch}$ speichern muß:

$$L \cdot \frac{di_{Sch}}{dt} + R_{Cu} \cdot i_{Sch} = -U_z \ .$$

Mit der Zeitkonstanten τ:

$$\tau := \frac{L}{R_{Cu}} \tag{25}$$

bringen wir diese Gleichung auf Norm:

$$\frac{di_{Sch}}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot i_{Sch} = -\frac{U_z}{L} \ . \tag{26}$$

Formel (26) ist die Standard-Differentialgleichung aller einschlägigen Umladevorgänge und bis auf das Störglied identisch mit Formel (10), weshalb ähnlich wie vorher gilt:

- Zugeordnete homogene Gleichung:

$$\frac{di_{Sch,h}}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot i_{Sch,h} = 0 \ . \tag{27}$$

- Deren Lösung:

$$i_{Sch,h}\,(t) = k \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \ . \tag{28}$$

  Die Integrationskonstante k ist ein Strom.

- Eine partikuläre Lösung von Formel (26) ist:

$$i_{Sch,p} = -\frac{U_z}{L} \cdot \tau = -\frac{U_z}{R_{Cu}} \ . \tag{29}$$

- Allgemeine Lösung von Formel (26) ist daher:

$$i_{Sch}\left(t\right) = i_{Sch,h}\left(t\right) + i_{Sch,p} = k \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{U_z}{R_{Cu}} \ . \tag{30}$$

- Anpassung an die Anfangsbedingung, Formel (19):

$$(i_L(t_0) =) \quad i_{Sch}\left(t_0\right) = \frac{U_o}{R_{Cu}} \ .$$

liefert in Formel (30):

$$i_{Sch}\left(t_0\right) = k \cdot e^{-\frac{t_0}{\tau}} - \frac{U_z}{R_{Cu}} = \frac{U_o}{R_{Cu}} \ .$$

Es folgt:

$$k = \frac{U_o + U_z}{R_{Cu}} \cdot e^{\frac{t_0}{\tau}} \ ,$$

und daher nach Formel (30) der gesuchte Strom $i_L\left(t\right) = i_{Sch}\left(t\right)$ durch die Spule mit Kupferverlusten:

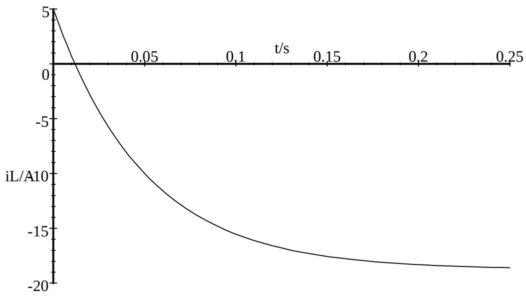
$$\begin{aligned} i_L\left(t\right) &= i_{Sch}\left(t\right) = k \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{U_z}{R_{Cu}} = \left(\frac{U_o + U_z}{R_{Cu}}\right) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} - \frac{U_z}{R_{Cu}} = \\ &= \frac{U_o}{R_{Cu}} \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} - \frac{U_z}{R_{Cu}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right) \ . \end{aligned} \tag{31}$$

Beispiel:	$U_o = 20V$	$R_{Cu} = 4\Omega$	$t_0 = 0s$
	$U_z = 75V$	$\tau = 0.05s$	

Mit Formel (31) folgt:

$$\begin{aligned} i_L\left(t\right) &= i_{Sch}\left(t\right) = \frac{U_o}{R_{Cu}} \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} - \frac{U_z}{R_{Cu}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right) = \\ &= \left(\frac{20}{4} \cdot e^{-\frac{t-0s}{0.05s}} - \frac{75}{4} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-0s}{0.05s}}\right)\right) A \ . \end{aligned}$$

Graph dazu:



Weil negative Ströme $i_{Sch} = -|i_{Sch}|$ aus physikalischen Gründen nicht vorkommen können, ist die Stromflußzeit gegenüber etwa fünffacher Zeitkonstanter τ sehr deutlich reduziert, wie man im Graph ablesen kann:

$$5\tau = 250ms \qquad\qquad t_{ab} < 15ms \ .$$

Darüber hinaus wird der Strom i_{Sch} durch das Schutzelement Sch, der gleichzeitig Spulenstrom i_L ist, *definiert auf null gestellt*.

2.2.4 Diskussion

1. Das Schutzelement Sch ist ein passiver Zweipol, daher muß der Strom $i_{Sch}(t)$ nach Bepfeilung im Schaltbild, Abschnitt 2.2.1, stets positiv sein. Auf diesen Umstand wurde schon in Formel (24) hingewiesen. In Formel (31) folgt somit wegen:

$$U_z = |U_z| \ , \tag{32}$$

worauf in Abschnitt 2.2.2 hingewiesen wurde, und wegen:

$$U_0 = |U_0| \ ,$$

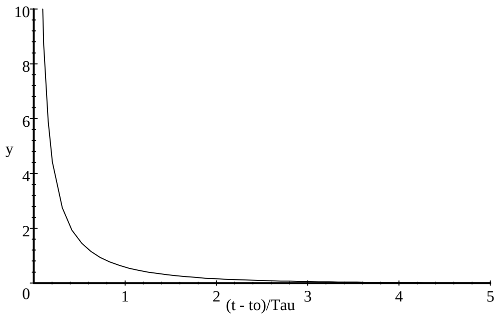
worauf in Abschnitt 2.2.1 hingewiesen wurde:

$$0 \leq \frac{U_z}{V} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right) \leq \frac{U_o}{V} \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \ ,$$

oder:

$$0 \leq \frac{U_z}{U_o} \leq \frac{e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}} = \frac{1}{e^{\frac{t-t_0}{\tau}} - 1} =: y(t) \ . \tag{33}$$

Kleinstes Argument $\frac{t-t_0}{\tau}$ der Exponentialfunktion $e^{\frac{t-t_0}{\tau}}$ ist wegen der vereinbarten Zeitbeschränkung nach Abschnitt 2.2.3: $t \geq t_0$ die Zahl 0. Daher ist der Graph zu Formel (33):



Man erkennt, daß zur Schaltzeit $t = t_0$ jede beliebige Spannung $U_z = |U_z|$ des Schutzelementes Sch (sie ist ein Parameter des Bauelementes Sch) angewendet werden kann.

2. Die Beschränkung auf die physikalische Forderung:

$$0 \leq \frac{U_z}{U_o} \leq \frac{1}{e^{\frac{t-t_0}{\tau}} - 1} =: y\,(t)$$

für alle Zeiten t gemäß $t_0 \leq t \leq \infty$ nach Formel (33) wird zur Dimensionierung des Schutzelementes Sch verwendet.

(a) Die Wahl von U_z bei festem U_o nach:

$$0 \leq \frac{U_z}{U_o} =: m \ \ (\in R_+) \tag{34}$$

im Schaltzeitpunkt $t = t_0$ ist völlig frei. Nennen wir diese positive reelle Zahl m *Multiplikator*.

(b) Die Abschaltverzögerung kann als Stromflußzeit $\Delta t_{ab} := t_{ab} - t_0$ für $t = t_{ab}$ aus Formel (31) berechnet werden:

$$\frac{U_o}{R_{Cu}} \cdot e^{-\frac{t_{ab}-t_0}{\tau}} - \frac{U_z}{R_{Cu}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_{ab}-t_0}{\tau}}\right) = 0 \ .$$

Die Lösung ist - unter Verwendung des Multiplikators m nach Formel (34):

$$\Delta t_{ab} := t_{ab} - t_0 = \tau \cdot \ln\left(1 + \frac{U_o}{U_z}\right) = \tau \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) \ . \tag{35}$$

Formel (35) stellt klar, daß mit steigendem Multiplikator m die Stromflußzeit Δt_{ab} abnimmt:

$$\Delta t_{ab} \downarrow \quad \text{mit} \quad m := \frac{U_z}{U_o} \uparrow \ .$$

Grenzfall:

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ \frac{U_z}{V}\to\infty}} \Delta t_{ab} = \tau \cdot \left(\lim_{m\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{m}\right)\right) = 0s\ .$$

Aus der Perspektive kurzer Abschalt- oder Stromflußzeit Δt_{ab} ist es daher erstrebenswert, Schutzelemente Sch mit möglichst hoher Durchbruchsspannung U_z zu verwenden.

3. Der oben erwähnten Strategie der Anwendung hoher Durchbruchsspannungen U_z zur Erzielung kurzer Abschaltzeiten Δt_{ab} stellt die Physik allerdings die instantane Umwandlung gespeicherter magnetischer Energie $W_m(t = t_0)$ in eine „nichtstörende“ Energieform, die während ebendieser möglichst kurzen Zeitspanne Δt_{ab} aus der Schaltung hinausbefördert werden muß, entgegen. Dies wurde im Abschnitt 1 beschrieben.
   Genau dieser Umstand bildet neben der Wahl von Δt_{ab} (bzw. U_z) das *zweite* Dimensionierungskriterium.

4. „Schlechtes“ Eisen mit hohen Ummagnetisierungsverlusten *unterstützt* den rascheren Abbau von im Abschaltzeitpunkt $t = t_0$ gespeicherter magnetischer Energie $W_m(t = t_0)$, weil neben dem Schutzelement Sch und dem Kupferverlustwiderstand R_{Cu} auch andere passive Bauelemente an der Umwandlung und dem Abtransport ins Schaltungsäußere der von der Induktivität L gespeicherten magnetischen Energie $W_m(t = t_0)$ beteiligt sind. Eisenverluste sind etwa dem Flußdichtequadrat im Eisen proportional und müssen im (verbesserten) Ersatzschaltbild verlustbehafteter Spulen daher als Widerstand parallel zur Induktivität L berücksichtigt werden [1, p.467]. Diese verfeinernde Tatsache wird im vorliegenden vergröbernden Text nicht berücksichtigt. Eisenverluste sind allerdings auch beim Schalten von Spulen, die „sonst“ mit Gleichstrom betrieben werden, wirksam.

2.2.5 Energie im Schutzelement und seine Erwärmung

Der Abschaltstromkreis von Abschnitt 2.2.3 enthält drei *nur passive* Bauelemente:

Bezeichnung	Funktion
Induktivität L	liefert die zur Schaltzeit t_0 in L gespeicherte magnetische Energie W_m während $t \geq t_0$ *aus*
Kupferverlustwiderstand R_{Cu}	wandelt *den einen Teil* von W_m in Wärme um
Schutzelement Sch	wandelt *den anderen Teil* von W_m in Wärme um.

Beide Bauelemente zusammen, Kupferverlustwiderstand R_{Cu} und Schutzelement Sch, müssen (abgesehen von anderen Effekten wie etwa Ummagnetisierungsverlusten im Eisenkern von L) während der in Formel (35) angegebenen Stromflußzeit Δt_{ab} die im Abschaltzeitpunkt t_0 in der Induktivität L gespeicherte magnetische Energie $W_m(t = t_0)$ in Wärme umwandeln. Diese Wärme ist aus der Schaltung hinaus in die Landschaft zu transportieren.

> **Selbstverständlich interessieren wir uns in diesem Text ausschließlich für die Arbeitsweise des Schutzelementes Sch und nicht für die des Kupferverlustwiderstandes R_{Cu}.**

Wird bloß „hin und wieder mal" geschaltet, so lohnt eine Rechnung kaum. Wird aber periodisch mit der Frequenz f geschaltet, so sollte die Eigenerwärmung des Schutzelementes Sch im stationären Schaltbetrieb abgeschätzt werden.

Im Schutzelement Sch periodisch umzuwandelnde magnetische Energie Nach Formel (4) ist für

$$i(t_1) = 0A \qquad \text{und: } i(t_2) \stackrel{!}{=} i(t_0) = \tfrac{U_o}{R_{Cu}} :$$

die insgesamt vom Kupferverlustwiderstand R_{Cu} und dem Schutzelement Sch abzubauende magnetische Energie:

$$W_m(t_0) = \int_{i(t_1)}^{i(t_2)} L \cdot i \cdot di = \frac{L}{2} \cdot i^2\,(t_0) = \frac{L}{2} \cdot \left(\frac{U_o}{R_{Cu}}\right)^2 . \tag{36}$$

Bei periodischem Abschalten, Periodendauer T zur Schaltfrequenz f, und **vorhergehendem völligen Entladen der Induktivität** L tritt diese Energie ebenso periodisch mit der Frequenz f auf.

Im Schutzelement Sch periodisch umgewandelte Energie *Ein Teil* der in Formel (36) angegebenen Energie W_m wird dem Schutzelement Sch aufgebürdet. Dabei ist die Spannung $u_{Sch} = U_z$ über dem Bauelement Sch (näherungsweise) zeitlich konstant, während Strom $i_{Sch}(t)$ nach Formel (31) während der Zeitspanne Δt_{ab} *zeitabhängig* fließt. Die Energie im Schutzelement ist daher für $t_0 = 0s$ (aus der Stromflußzeit Δt_{ab} wird dann nach Definition, Formel (35), einfach t_{ab}):

$$\begin{aligned}
W_m &= \frac{L}{2} \cdot \left(\frac{U_o}{R_{Cu}}\right)^2 > W_{Sch} = \int_0^{t_{ab}} u_{Sch} \cdot i_{Sch} \cdot dt = \\
&= U_z \cdot \int_0^{t_{ab}} \left(\frac{U_o}{R_{Cu}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{U_z}{R_{Cu}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right) \cdot dt = \\
&= \frac{U_z \cdot U_o}{R_{Cu}} \cdot \int_0^{t_{ab}} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot dt - \frac{U_z^2}{R_{Cu}} \cdot \int_0^{t_{ab}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot dt = \\
&= \frac{U_z^2}{R_{Cu}} \cdot \left(\frac{1}{m} \cdot \int_0^{t_{ab}} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot dt - \int_0^{t_{ab}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot dt\right) .
\end{aligned}$$

Wegen

$$\Im := \int_0^{t_{ab}} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot dt = \tau \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_{ab}}{\tau}}\right) \tag{37}$$

und mit Formel (35):

$$\frac{t_{ab}}{\tau} = \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) \quad \Rightarrow \quad \Im = \tau \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_{ab}}{\tau}}\right) = \frac{\tau}{1+m} \tag{38}$$

folgt:

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{L}{2} \cdot \left(\frac{U_o}{R_{Cu}}\right)^2 > \\ &> \frac{U_z^2}{R_{Cu}} \cdot \left(\frac{1}{m} \cdot \Im - t_{ab} + \Im\right) = \\ &= \frac{U_z^2}{R_{Cu}} \cdot \left(\Im \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right) - t_{ab}\right) = \\ &= \frac{U_z^2}{R_{Cu}} \cdot \left(\frac{\tau}{1+m} \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right) - t_{ab}\right) \ . \end{aligned}$$

Nach weiterer kurzer Umformung erhält man den ungemein einfachen Ausdruck:

$$W_m = \frac{L}{2} \cdot \left(\frac{U_o}{R_{Cu}}\right)^2 \ > \ \frac{U_z^2}{R_{Cu}} \cdot \left(\frac{\tau}{m} - t_{ab}\right) \ . \tag{39}$$

In Wärmestrom instantan umgewandelte Leistung im Schutzelement Die beim periodischen Schalten von S mit der Frequenz $f := \frac{1}{T}$ instantan im Schutzelement Sch in Wärmestrom umgewandelte Leistung P_{Sch} ist für die Stromflußzeit t_{ab}:

$$P_{Sch} := \frac{W_{Sch}}{T} = W_{Sch} \cdot f = \frac{U_z^2}{R_{Cu}} \cdot \left(\frac{\tau}{m} - t_{ab}\right) \cdot f \ . \tag{40}$$

In [2] wird die gesamte abzubauende Energie dem Schutzelement Sch aufgehalst:

$$P_m := \frac{W_m}{T} = W_m \cdot f = \frac{L}{2} \cdot \left(\frac{U_o}{R_{Cu}}\right)^2 \cdot f \ > \ P_{Sch} \ . \tag{41}$$

Damit befindet sich der Hersteller dieser Schutzelemente auf der sicheren Dimensionierungsseite.

Temperatur des Schutzelementes Sch Die im Bauelementes Sch in Wärmestrom umgesetzte Verlustleistung nach Formel (40) wird im stationären Fall (d.h. nach unendlich langer Zeit des Schaltens mit der Frequenz $f := \frac{1}{T}$ unter unveränderlichen Bedingungen) nach Überwindung des thermischen Widerstandes R_{th} von Sch an die Umgebung der Schaltung, die auf unveränderlicher

Temperatur ϑ_{amb} liege, abgeführt. Dabei erwärmt sich das Schutzelement Sch auf die Temperatur ϑ_{Sch}:

$$\Delta\vartheta := \vartheta_{Sch} - \vartheta_{amb} = R_{th} \cdot P_{Sch} \ .$$

Für die Temperatur ϑ des Schutzelementes Sch gilt also:

$$\vartheta_{Sch} = R_{th} \cdot P_{Sch} + \vartheta_{amb} \ . \tag{42}$$

Beispiel:
Setzen wir das Zahlenbeispiel von Seite 15 fort:

$$\begin{array}{llll} U_o = 20V & R_{Cu} = 4\Omega & t_0 = 0s & R_{th} = 0.7K/W \\ U_z = 75V & \tau = 0.05s & f = 50Hz & \vartheta_{amb} = 40°C \end{array}$$

Multiplikator m, Formel (34):

$$m := \frac{U_z}{U_o} = \frac{75}{20} = 3.75 \ .$$

Stromflußzeit t_{ab} nach Formel (35):

$$t_{ab} = \tau \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \left(0.05 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{3.75}\right)\right) s = 11.8ms \ .$$

Leistung (Wärmestrom) P_{Sch} im Schutzelement Sch nach Formel (40):

$$\begin{aligned} P_{Sch} &= \frac{U_z^2}{R_{Cu}} \cdot \left(\frac{\tau}{m} - t_{ab}\right) \cdot f = \\ &= \left(\frac{75^2}{4} \cdot \left(\frac{0.05}{3.75} - 0.0118\right) \cdot 50\right) W = 108W \ . \end{aligned}$$

Temperatur ϑ_{Sch} des Schutzelementes nach Formel (42):

$$\vartheta_{Sch} = R_{th} \cdot P_{Sch} + \vartheta_{amb} = (0.8 \cdot 108 + 40)^\circ C = 126°C \ .$$

Benützt man die Firmenunterlagen [2], so muß man zunächst die Induktivität L rechnen, Formel (25):

$$L = \tau \cdot R_{Cu} = (0.05 \cdot 4)\, H = 0.2H \ .$$

Aus Formel (41) folgt:

$$P_m = \frac{L}{2} \cdot \left(\frac{U_o}{R_{Cu}}\right)^2 \cdot f = \left(\frac{0.2}{2} \cdot \left(\frac{20}{4}\right)^2 \cdot 50\right) W = 125W \ .$$

Weil wir wissen wie „der Hase läuft“, können wir mit gutem Gewissen behaupten, daß - allerdings unter den idealisierenden Annahmen unseres Schutzelementes Sch - der Kupferverlustwiderstand R_{Cu} die Differenzleistung P_{Cu}:

$$P_{Cu} = P_m - P_{Sch} = (125 - 108)\, W = 17W$$

dissipiert.

Ergänzung In [2] wird eine etwas genauere Struktur der Kennlinie des Schutzelementes Sch, sowie deren Temperaturabhängigkeit in die Abschätzung einbezogen.

3 Schlußbemerkung

Die Problemstellung wurde anläßlich eines Seminars der Firma **GINZINGER engineering**, http://www.ginzinger.com, Anfang des Jahres 2000 an Hand von Unterlagen von SGS-Thomson [2] diskutiert. Das Unternehmen **GINZINGER engineering** hat u.a. große Erfahrung mit der Handhabung von Schaltvorgängen bei Motoren.

Literatur

[1] *Dieter Fleischmann*: Basiswissen Elektrotechnik, Vogel Würzburg (1999)

[2] Protection Devices, SGS-Thomson, 2. Aufl (1993)